Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques
Niveau supérieur
Épreuve 1

Mercredi 2 mai 2018 (après-midi)

Numéro de session du candidat

2 heures

Instructions destinées aux candidats

- Écrivez votre numéro de session dans les cases ci-dessus.
- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Aucune calculatrice n'est autorisée pour cette épreuve.
- Section A : répondez à toutes les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet.
- Section B : répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet. Écrivez votre numéro de session sur la première page du livret de réponses, et attachez ce livret à cette épreuve d'examen et à votre page de couverture en utilisant l'attache fournie.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques NS et de mathématiques complémentaires NS** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[100 points]**.

2218 – 7219

Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

Section A

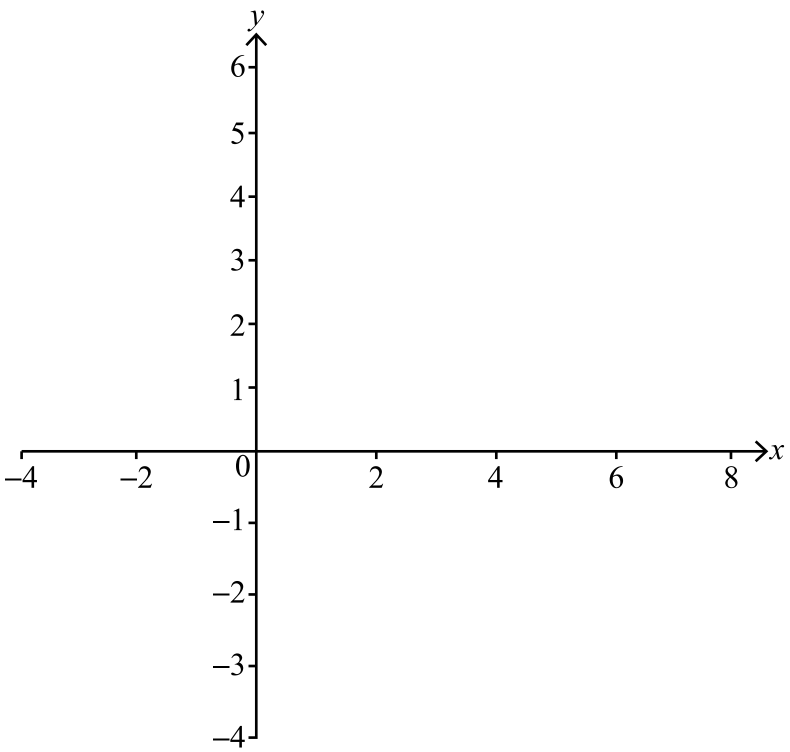
Répondez à **toutes** les questions. Rédigez vos réponses dans les cases prévues à cet effet. Si cela est nécessaire, vous pouvez poursuivre votre raisonnement en dessous des lignes.

1. [Note maximale : 4]

L'angle aigu entre les vecteurs $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ et $5\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ est désigné par θ.
Trouvez $\cos\theta$.

2. [Note maximale : 7]

(a) Esquissez les représentations graphiques de $y = \frac{x}{2} + 1$ et $y = |x - 2|$ sur le système d'axes suivant. [3]



(b) Résolvez l'équation $\frac{x}{2} + 1 = | x - 2 |$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. [Note maximale : 6]

La variable aléatoire discrète X possède la distribution de probabilité suivante, où p est une constante.

x	0	1	2	3	4
$\mathrm{P}(X=x)$	p	$0{,}5-p$	$0{,}25$	$0{,}125$	p^3

(a) Trouvez la valeur de p. [2]

(b) (i) Trouvez μ, l'espérance mathématique de X.

(ii) Trouvez $\mathrm{P}(X>\mu)$. [4]

4. [Note maximale : 6]

Considérez la courbe $y = \frac{1}{1-x} + \frac{4}{x-4}$.

Trouvez les abscisses des points sur la courbe où la pente est égale à zéro.

5. [Note maximale : 7]

Soit $u_1, u_2, u_3, \ldots$ la suite géométrique de raison r.
Considérez la suite $A = \{a_n = \log_2 |u_n| : n \in \mathbb{Z}^+\}$.

(a) Montrez que A est une suite arithmétique, en indiquant sa raison d en fonction de r. [4]

Une suite géométrique particulière est définie par $u_1 = 3$ et $S_\infty = 4$.

(b) Trouvez la valeur de d. [3]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. [Note maximale : 7]

Considérez les fonctions f et g, définies pour $x \in \mathbb{R}$ et données par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x} \cos x$.

(a) Trouvez

(i) $f'(x)$;

(ii) $g'(x)$. [3]

(b) À partir de là ou par toute autre méthode, trouvez $\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Note maximale : 6]

Considérez les nombres complexes distincts $z = a + \mathrm{i}b$, $w = c + \mathrm{i}d$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Trouvez la partie réelle de $\frac{z + w}{z - w}$. [4]

(b) Trouvez la valeur de la partie réelle de $\frac{z + w}{z - w}$ lorsque $|z| = |w|$. [2]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

8. [Note maximale : 7]

(a) Utilisez le changement de variable $u = x^{\frac{1}{2}}$ pour trouver $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$. [4]

(b) À partir de là, trouvez la valeur de $\frac{1}{2}\int_1^9 \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}}$, en exprimant votre réponse sous la forme $\arctan q$, où $q \in \mathbb{Q}$. [3]

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

N’écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

Section B

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page.

9. [Note maximale : 24]

Les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D ont comme vecteurs-position $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$, par rapport à l’origine O.

On donne $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

(a) (i) Expliquez pourquoi ABCD est un parallélogramme.

(ii) En utilisant l’algèbre vectorielle, montrez que $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$. [4]

Les vecteurs-position $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ sont donnés par

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{b} &= 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + p\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{c} &= q\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{d} &= -\boldsymbol{i} + r\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

où p, q et r sont des constantes.

(b) Montrez que $p = 1$, $q = 1$ et $r = 4$. [5]

(c) Trouvez l’aire du parallélogramme ABCD. [4]

Le point d’intersection des diagonales de ABCD est désigné par M.

(d) Trouvez l’équation vectorielle de la droite passant par M et normale au plan Π contenant ABCD. [4]

(e) Trouvez l’équation cartésienne de Π. [3]

Le plan Π coupe l’axe des abscisses $\mathrm{O}x$, l’axe des ordonnées $\mathrm{O}y$ et l’axe des cotes $\mathrm{O}z$ respectivement en X, Y et Z.

(f) (i) Trouvez les coordonnées de X, Y et Z.

(ii) Trouvez YZ. [4]

N'écrivez **pas** vos solutions sur cette page.

10. [Note maximale : 14]

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, pour $x \in \mathbb{R}, x \neq -\dfrac{d}{c}$.

(a) Trouvez la fonction réciproque f^{-1}, en indiquant son domaine. [5]

La fonction g est définie par $g(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$, $x \in \mathbb{R}, x \neq 2$.

(b) (i) Exprimez $g(x)$ sous la forme $A + \dfrac{B}{x-2}$, où A et B sont des constantes.

(ii) Esquissez la représentation graphique de $y = g(x)$. Indiquez les équations de toute asymptote et les coordonnées de tout point d'intersection avec les axes. [5]

La fonction h est définie par $h(x) = \sqrt{x}$, pour $x \geq 0$.

(c) Indiquez le domaine et l'image de $h \circ g$. [4]

11. [Note maximale : 12]

(a) Montrez que $\log_{r^2} x = \dfrac{1}{2}\log_r x$, où $r, x \in \mathbb{R}^+$. [2]

On donne $\log_2 y + \log_4 x + \log_4 2x = 0$.

(b) Exprimez y en fonction de x. Donnez votre réponse sous la forme $y = px^q$, où p et q sont des constantes. [5]

La région R est délimitée par la représentation graphique de la fonction trouvée dans la partie (b), l'axe des abscisses Ox, et les droites $x = 1$ et $x = \alpha$, où $\alpha > 1$. L'aire de R est $\sqrt{2}$.

(c) Trouvez la valeur de α. [5]

Veuillez ne **pas** écrire sur cette page.

Les réponses rédigées sur cette page
ne seront pas corrigées.